Minule: • D11 – parciální derivace $\in \mathbb{R}$

• P12 – $\exists$ PD $\not\Rightarrow$ spojitost

– „ne vždy $f_{xy} = f_{yx}$"

• V13 (bez Dk.): Spoj. PD $\Rightarrow$ lze zaměnit pořadí

Opakování: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ... tečna ke grafu f:

Přímku $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ v $\mathbb{R}^2$

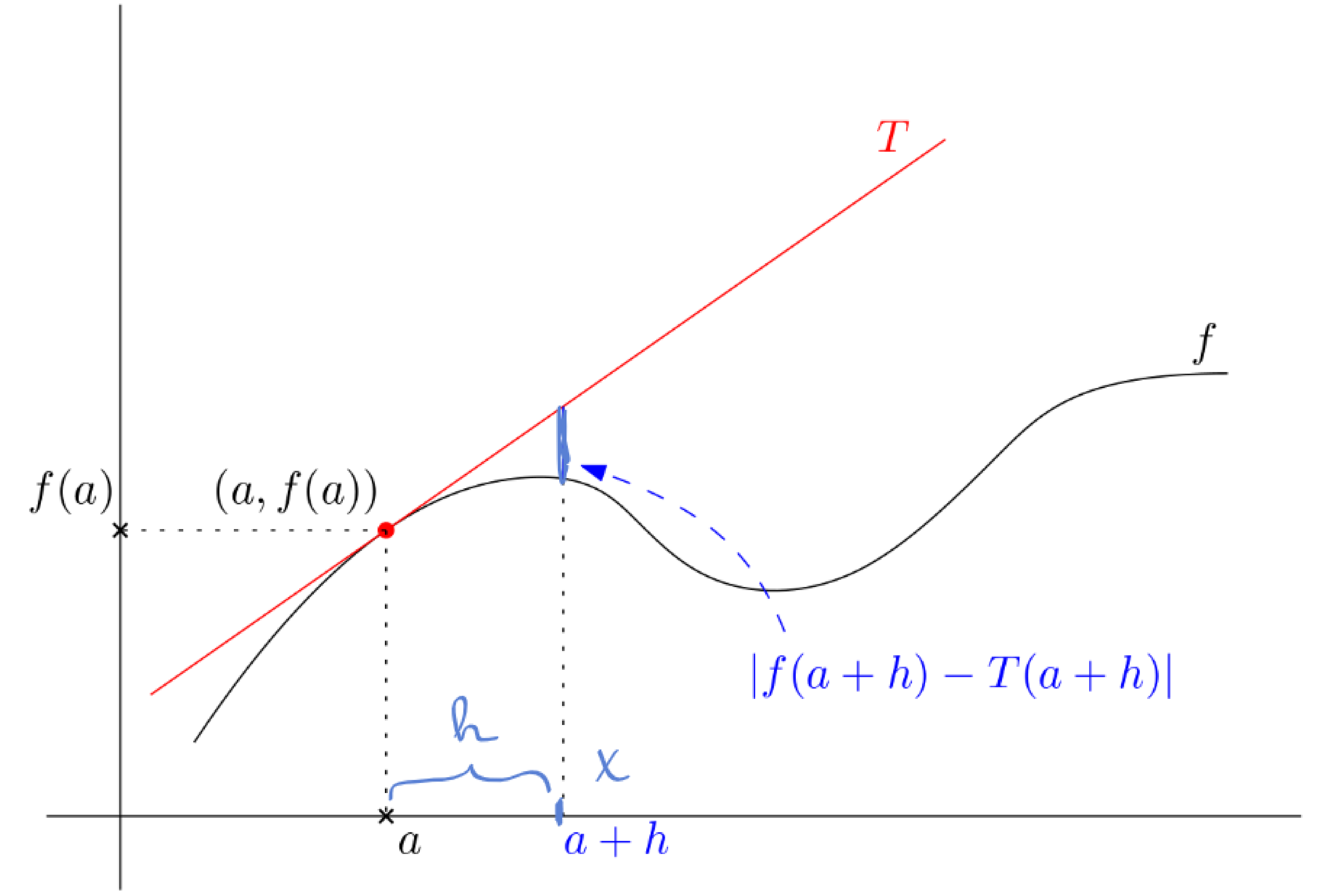
(existuje-li $f'(a) \in \mathbb{R}$) nazýváme tečnou ke grafu f v bodě $(a, f(a))$.

Označíme-li

$$T(x) = f(a) + \underbrace{f'(a)\cdot(x-a)}_{\text{„lineární část přírůstku"}},$$

pak T je lineární funkce, jejíž graf je ona tečna.

Neformálně: „T je tečna k f v bodě a".



Víme: tečna „dobře aproximuje" funkci blízko bodu dotyku.

Přesněji: $f(x) - T(x) = o(x-a)$, $x \to a$

Dk: $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \left(f(a) + \overbrace{f'(a)(x-a)}^{L(x-a)}\right)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a}\frac{f'(a)\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = f'(a) - f'(a) = 0$$

Vhodnější zápis: $x - a =: h$ (přír. nez. prom.)

Pak: $f(x) - T(x) = o(x-a)$, $x \to a$

$$\iff f(a+h) - T(a+h) = o(h), \quad h \to 0$$

$$\iff \underbrace{f(a+h) - f(a)}_{\text{přír. } f} - \underbrace{f'(a) \cdot h}_{\text{„přír. tečny"}} = \underbrace{o(h)}_{\text{rozdíl je malý}}, \quad h \to 0$$

Člen $f'(a) \cdot h$ můžeme chápat jako:

- lin. část přírůstku funkce f (s krokem h)
- lineární formu $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $L(h) = f'(a) \cdot h$

ze. vl. der. — směrnice

Intuitivně: „graf dif. fce je lokálně nerozlišitelný od přímky (tečny)".

FCE 2 PROM — analogie:
„graf fce je lokálně nerozliš. od roviny (tečné)."

Totální diferenciál

Definice 14: nechť f je funkce d prom., $a \in \mathbb{R}^d$. nechť $L: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je lineární forma def. pro $h = (h_1, h_2, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$ předpisem

$$L(h) = L(h_1, h_2, \dots, h_d) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i.$$

$$(\text{tj. } L(h) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \cdot (h_1, h_2, \dots, h_d))$$

Řekneme že L je totální diferenciál fce f v bodě a, jestliže

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

$(h_1, \dots, h_d) \to (0, \dots, 0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

Ekvivalentně: • $f(a+h) - f(a) - L(h) = o(\|h\|)$, $h \to 0$

• $f(a+h) - f(a) = L(h) + o(\|h\|)$, $h \to 0$

• $f(a+h) - f(a) = L(h) + \eta(h)$, kde

chybová fce η splňuje $\eta(h) = o(\|h\|)$, $h \to 0$.

Chyba, se kterou L popisuje přírůstek f (tj. η) je „velmi malá vzhl. k délce bodu"

• $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i + \eta(h)$, kde η ...

Terminologie: • Značíme $L =: df(a)$, tj.

$L(h) = df(a)(h) =: d_h f(a)$.

Někdy $L = f'(a)$ ... nebudu používat.

• Říkáme, že f je diferencovatelná v bodě a, pokud existuje $df(a)$.

Definice 15: (tečná nadrovina) $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a)) = (a_1, \dots, a_d, f(a_1, \dots, a_d))$ rozumíme graf (afinní) funkce

$$y(x) = f(a) + L(x-a), \text{ kde } L = df(a)$$

Tj. $y(x) = f(a) + \underline{df(a)(x-a)}$.

Věta 16: Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ tot. dif.

$$df(a)(h) = L(h) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i .$$

Pak existují P.D. $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \alpha_j$, $j = 1, \dots, d$.

Důkaz: $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\cdot e_j) - f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_d) - f(a_1, \dots, a_d)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{L(\underbrace{t\cdot e_j}_{= h}) + \eta(\underbrace{t\cdot e_j}_{= h})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\, L(e_j)}{\cancel{t}} + \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{\eta(t\cdot e_j)}{\|t\cdot e_j\|}}_{0 \text{ podle def. dif.}} = L(e_j) + 0$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)\cdot(0, 0, \dots, \overset{j}{0}, 1, 0, \dots, 0) = \alpha_j \cdot 1 = \alpha_j$$ $\boxtimes$

Věta 17: Existuje $df(a) \Rightarrow f$ je spoj. v a.

Důkaz: Chceme: $$\lim_{\substack{h\to 0 \\ (h_1,\dots,h_d)\to(0,\dots,0)}} f(a+h) = f(a).$$

$$0 \le |f(a+h) - f(a)| = |L(h) + \eta(h)| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i + \eta(h)\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i||h_i| + |\eta(h)| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i| \cdot \|h\| + |\eta(h)| = \underbrace{\|h\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{d} |\alpha_i|}_{\text{konst.}} + \underbrace{|\eta(h)|}_{\to 0}$$

$$\xrightarrow[(h_1,\dots,h_d)\to(0,\dots,0)]{h\to 0} 0.$$

Tedy podle LO2P: $\lim_{h\to 0} |f(a+h) - f(a)| = 0$

Tedy $\lim f(a+h) = f(a)$. $\boxtimes$

Poznámka: nyní už víme, že $\exists$ P.D. $\not\Rightarrow$ dif. kdyby ano, tj. kdyby platila i opačná impl V16, pak bychom měli:

$$\left[\ \exists PD \Rightarrow \exists df(a) \overset{V17}{\Longrightarrow} f \text{ spoj. v } a\ \right]$$

Tj. $\exists PD \Rightarrow$ spoj. Ale my už víme, že tato impl neplatí $(f(x,y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y)$

Tedy tato nemůže platit.

Připomenutí: Lagr. věta o střední hodnotě:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ spoj., $f'(x)$ ex., $x \in (a,b)$.

Pak ex $\xi \in (a,b)$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$,

resp. platí $f(b)-f(a) = f'(\xi)\cdot(b-a)$.

Věta 18: nechť f je fce d proměnných, $I \subseteq \mathbb{R}^d$ je otevřený interval

$$\Big(\text{tj. } I = \underbrace{(\bar{a}_1, \bar{b}_1)}_{\subseteq \mathbb{R}} \times \underbrace{(\bar{a}_2, \bar{b}_2)}_{\subseteq \mathbb{R}} \times \dots \times \underbrace{(\bar{a}_d, \bar{b}_d)}_{\subseteq \mathbb{R}}\Big).$$

nechť f má ve všech bodech I všechny PD.

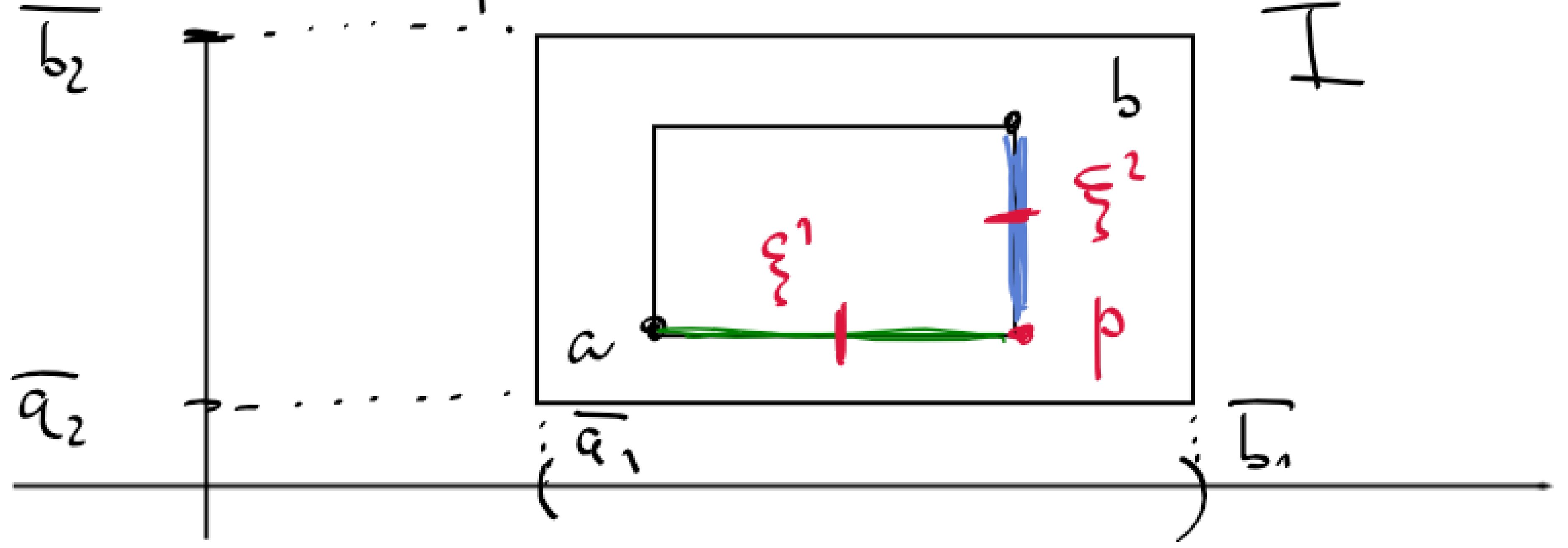
nechť $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d) \in I$.

Pak existují body $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^d \in \mathbb{R}^d$, že

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{d} (b_i - a_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i).$$

Důkaz: $d = 1$ ... přesně Lagr. věta.

$d = 2$:



$$f(b)-f(a) = \big(f(b)-f(p)\big) + \big(f(p)-f(a)\big)$$

$$f(b)-f(p) = f(b_1,b_2) - f(p_1,p_2) =$$

[Ale $p_1 = b_1$ neboť p a b „jsou nad sebou"]

$$= f(b_1, b_2) - f(b_1, p_2) =$$

jedna proměnná

Podle Lagr. V. $\exists \xi \in [p_2, b_2]$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(b_1, \xi)\cdot(b_2 - p_2)$$

Označíme $\xi^2 = (b_1, \xi)$. Ale $p_2 = a_2$.

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(\xi^2)\cdot(b_2 - a_2)$$

Analogicky $\exists\, \xi^1$:

$$f(p)-f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi^1)\cdot(b_1 - a_1).$$

Důkaz pro vyšší dimenze analogicky nebo indukcí. Vynechám. $\boxtimes$

Věta 19: Všechny $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ spoj. v bodě a

$\Rightarrow$ ex. $df(a)$.